Acta Sci. Math., 38 (1976), 183—185

Fonctions caractéristiques constantes

RADU I. TEODORESCU

1. Dans l'étude d'une contraction complètement non-unitaire (c.n.u.) $T\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ sur un espace de Hilbert séparable, il est important de connaître la fonction caractéristique, c'est-à-dire la fonction analytique contractive $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_T(\lambda)\}$ où $\mathfrak{D}_T=(I-T^*T)^{1/2}$, $D_{T^*}=(I-TT^*)^{1/2}$ sont les opérateurs de défaut, $\mathfrak{D}_T=\overline{D_T\mathfrak{H}}$, $\mathfrak{D}_{T^*}=\overline{D_{T^*}\mathfrak{H}}$ sont les sous-espaces de défaut et $\Theta_T(\lambda)$ est donnée par

$$\Theta_T(\lambda)=[-T+\lambda\mathfrak{D}_{T^*}(I-\lambda T^*)^{-1}D_T]\,|\,\mathfrak{D}_T \quad (|\lambda|<1).$$

Pour les concepts et notations employées dans cette Note cf. [3] ch. VI—VII.

Dans la présente Note on caractérise les contractions dont la fonction caractéristiqu est constante, en obtenant ainsi des indications supplémentaires concernant les factorisations «étranges».

2. Nous commençons par déterminer la fonction caractéristique $\Theta_T(\lambda)$ d'une contraction c.n.u. $T\in\mathfrak{B}(H)$ pour laquelle il existe un sous-espace $\mathfrak{H}_1\subset\mathfrak{H}$, invariant pour T, tel que les opérateurs T_1 et T_2 dans la triangulation correspondante $T=\begin{bmatrix} T_1 & * \\ 0 & T_2\end{bmatrix}$ sont une translation unilatérale et l'adjoint d'une telle translation.

Proposition *1. Pour que T admette une triangulation telle que T_1 est une translation unilatérale et T_2 est l'adjoint d'une translation unilatérale, il faut et il suffit que la fonction caractéristique $\Theta_T(\lambda)$ soit constante.*

La condition est nécessaire. En effet, soit $\Theta_T(\lambda)=\Theta_2(\lambda)\,\Theta_1(\lambda)$ la factorisation régulière correspondant au sous-espace invariant $\mathfrak{H}_1$; les parties pures des fonctions facteurs $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{F}, \Theta_1(\lambda)\}$ et $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_2(\lambda)\}$ coïncident alors avec les fonctions caractéristiques de T_1 et T_2 selon le cas. Comme T_1 est une translation unilatérale, sa fonction caractéristique est $\{\{0\}, \mathfrak{D}_{T^*}, 0\}$, et T_2 étant l'adjoint d'une translation unilatérale sa fonction caractéristique est $\{\mathfrak{D}_{T_2}, \{0\}, 0\}$. En tenant compte de [4], th. 2, on déduit que $\Theta_T(\lambda)$ est constante.

Reçu le 19. septembre 1975.

La condition est suffisante. Pour démontrer cette affirmation notons que si une fonction analytique contractive $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_x, \Theta(\lambda)\}$ est constante, alors la fonction $\Delta(e^{it})=[I-\Theta^*(e^{it})\Theta(e^{it})]^{1/2}$ est aussi constante, d'où $\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}=L^2(\overline{\Delta\mathfrak{E}})$. En désignant par P la projection orthogonale de $L^2(\overline{\Delta\mathfrak{E}})$ sur $H^2(\overline{\Delta\mathfrak{E}})$ notons que pour tout $v\in L^2(\overline{\Delta\mathfrak{E}})$ on a $P\Delta v=\Delta Pv$. Pour $u\oplus v\in\mathfrak{H}$ on a

$$(*) \qquad \Theta^*u+P\Delta v = 0.$$

En effet, vu que $u\oplus v\in\mathfrak{H}$, on a $\Theta^*u+\Delta v\perp H^2(\mathfrak{E})$ mais $\Theta^*u\in H^2(\mathfrak{E})$ parce que Θ est constante, d'où $(*)$. Nous décomposons les éléments $u\oplus v\in\mathfrak{H}$ sous la forme

$$u\oplus v = (u\oplus Pv)+(0\oplus(I-P)v).$$

Il est évident que $u\oplus Pv\in\mathfrak{H}$, $0\oplus(I-P)v\in\mathfrak{H}$ et aussi

$$\langle u\oplus Pv, 0\oplus(I-P)v\rangle = 0.$$

Donc l'espace $\mathfrak{H}$ se décompose en somme orthogonale $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_1\oplus\mathfrak{H}_2$ où

$$\mathfrak{H}_1 = \{u\oplus v;\, u\oplus v\in\mathfrak{K}_+,\, \Theta^*u+\Delta v = 0\},$$
$$\mathfrak{H}_2 = \{0\oplus v;\, 0\oplus v\in\mathfrak{H}\} = \{0\oplus v;\, v\in L^2(\overline{\Delta\mathfrak{E}}),\, v\perp H^2(\overline{\Delta\mathfrak{E}})\}.$$

Il est manifeste que l'espace $\mathfrak{H}_1$ est invariant à T et la restriction $T_1=T|\mathfrak{H}_1$ est une isométrie; de plus cette isométrie est une translation unilatérale parce que $\bigcap_{n=0}^{\infty} T_1^n\mathfrak{H}_1=\{0\}$.

Pour montrer que la compression T_2 de T à $\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{H}_1$ est l'adjointe d'une translation unilatérale, il suffit de vérifier que $T^*|\mathfrak{H}_2$ est une telle translation, ce qui est évident en tenant compte des expressions de $\mathfrak{H}_2$ et de T^*.

Remarque. Si la fonction caractéristique d'une contraction T est constante, on a $\Theta_T(\lambda)=-T|\mathfrak{D}_T$.

3. Soit $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ une fonction analytique contractive. On dit que la factorisation $\Theta(\lambda)=\Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda)$ est *étrange* si elle n'est pas régulière, mais il existe néanmoins un sous-espace fermé $\mathfrak{H}_1\subset\mathfrak{H}$ invariant pour T, tel que les parties pures de $\Theta_1(\lambda)$ et $\Theta_2(\lambda)$ coïncident avec les fonctions caractéristiques de la restriction T_1 de T à $\mathfrak{H}_1$ et de la compression T_2 de T à $\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{H}_1$, selon le cas. Dans [1], C. Foiaş montre que la fonction analytique contractive pure $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, -{}^1/_2 I\}$, où $\mathfrak{E}$ est de dimension infinie, admet des factorisations étranges, an remarquant que l'opérateur T correspondant contient une translation unilatérale de multiplicité infinie et aussi l'adjoint d'un tel opérateur. Nous allons démontrer la suivante

Proposition 2. *Soit* $T\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *une contraction c.n.u. telle que* $\dim\overline{T^*\mathfrak{D}_{T^*}}=\infty$. *La fonction analytique contractive pure* $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, -T\}$ *admet alors des factorisations étranges.*

Démonstration.[1]) Envisageons les fonctions analytiques contractives (cons-

[1]) Cette démonstration est inspirée de celle de [1], prop. 1.

tantes) $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}\oplus\mathfrak{D}_T\oplus\mathfrak{D}_T, \Theta_1(\lambda)\}$ et

$$\{\mathfrak{D}_{T^*}\oplus\mathfrak{D}_T\oplus\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_2(\lambda)\}$$

où

$$\Theta_1 h = T^* h \oplus \frac{1}{\sqrt{2}} D_T h \oplus \frac{1}{\sqrt{2}} D_T h \quad \text{et} \quad \Theta_2(e\oplus f\oplus g) = -e.$$

Il est évident que $-T=\Theta_2\Theta_1$ donc il nous reste seulement à vérifier que cette factorisation est étrange. Pour cela notons que la partie pure de la fonction $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}\oplus \oplus\mathfrak{D}_T\oplus\mathfrak{D}_T, \Theta_1\}$ est

$$\{\{0\}, \{e\oplus f\oplus g;\ e\in\mathfrak{D}_{T^*}, f, g\in\mathfrak{D}_T,\ \sqrt{2}\,T^*e+D_T f+D_T g=0\}, 0\}$$

et, de même, la partie pure de $\{\mathfrak{D}_{T^*}\oplus\mathfrak{D}_T\oplus\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_2\}$ est $\{\{0\}, \{0\}\oplus\mathfrak{D}_T\oplus\mathfrak{D}_T, 0\}$. La fonction analytique contractive $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, -T\}$ étant constante, il existe d'après la proposition 1 un sous-espace $\mathfrak{H}_1$ tel que la restriction T_1 de T à $\mathfrak{H}_1$ soit une translation unilatérale et la compression T_2 de T à $\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{H}_1$ soit l'adjoint d'une telle translation. Il est facile de vérifier que le sous-espace ambulant de T_1 est $\mathfrak{L}=\{e\oplus f\oplus\mathfrak{K}_+, e\in\mathfrak{H}_{T^*}, f\in\mathfrak{H}_T, T^*e=D_T f\}$. En comparant le sous-espace $\{e\oplus f\oplus g;\ \sqrt{2}\,T^*e+D_T f+ +D_T g=0\}$ avec le sous-espace $\mathfrak{L}$ et en tenant compte de ce que $\dim \overline{T^*\mathfrak{D}_{T^*}}=\infty$ on trouve que la partie pure de la fonction $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}\oplus\mathfrak{D}_T\oplus\mathfrak{D}_T, \Theta_1\}$ coïncide avec la fonction caractéristique de T_1. Vu que $\mathfrak{H}_T=\overline{T^*\mathfrak{D}_{T^*}}\oplus\ker T$ il résulte que $\dim\mathfrak{H}_T=\infty$ donc la partie pure de la fonction $\{\mathfrak{D}_{T^*}\oplus\mathfrak{D}_T\oplus\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_2\}$ coïncide avec la fonction caractéristique de T_2. Pour montrer que la factorisation en question est étrange il ne nous reste qu'à montrer que l'égalité

$$\overline{\Delta^2\Theta_1\mathfrak{D}_T}\oplus\overline{\Delta_1\mathfrak{D}_T} = \overline{\Delta_2(\mathfrak{D}_{T^*}\oplus\mathfrak{D}_T\oplus\mathfrak{D}_T)}\oplus\overline{\Delta_1\mathfrak{D}_T}$$

n'est pas vraie. Pour cela notons que

$$\overline{\Delta_2\Theta_1\mathfrak{D}_T}\oplus\overline{\Delta_1\mathfrak{D}_T} = \{0\oplus e\oplus e;\ e\in\mathfrak{D}_T\}\oplus\{0\}$$

et

$$\overline{\Delta_2(\mathfrak{D}_{T^*}\oplus\mathfrak{D}_T\oplus\mathfrak{D}_T)}\oplus\overline{\Delta_1\mathfrak{D}_T} = \{\{0\}\oplus\mathfrak{D}_T\oplus\mathfrak{D}_T\}\oplus\{0\},$$

d'où notre affirmation.

Bibliographie

[1] C. Foiaş, Factorisations étranges, *Acta Sci. Math.*, **34** (1973), 85—89.

[2] B. Sz.-Nagy, Sous-espaces invariants d'un opérateur et factorisation de sa fonction caractéristique, *Actes du Congrès Intern. Math. Nice, 1970*, **2** (1972), 459—465.

[3] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*, Masson et Cie/Akadémiai Kiadó (Paris/Budapest, 1967).

[4] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Forme triangulaire d'une contraction et factorisation de sa fonction caractéristique, *Acta Sci. Math.*, **28** (1967), 201—213.

UNIVERSITÉ BRAŞOV
COLINA UNIVESITĂŢII
BRAŞOV 2200, ROUMANIE